

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 14.02.2009

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Calculați $\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie matricele $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $ABC = I_n$.

a) Să se demonstreze că A, B, C sunt inversabile.

b) Dacă matricea $U = I_n + A + AB$ este inversabilă, să se demonstreze că matricele $V = I_n + B + BC$ și $W = I_n + C + CA$ sunt inversabile și suma inverselor lor este I_n .

prof. Emilian Runceanu

3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $a > b > 0$ și $\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)^2 - 1 = \frac{x_{n+2} + (-1)^{n+1}}{x_{n+2}}$,
 $\forall n \geq 1$. Să se studieze convergența șirului.

prof. Nicolae Stănică

4. Fie $q > 1$ și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, cu proprietatea

$$f(x+1) - f(x) = r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{q^k}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent și calculați limita lui.

prof. Marius Damian

Notă:

1) Toate subiectele sunt obligatorii.

2) Timpul de lucru este de 3 ore.